が得られる。さてここで，もしも $\alpha-\sin\alpha\cos\alpha$ が S^2 上で定数 C になるとすると，伝導度は，

$$\sigma=\frac{e^2}{2\pi}C\frac{1}{8\pi}\int_{S^2}dS_\mu\varepsilon^{\mu\nu\rho}\varepsilon_{abc}n^a\partial_\nu n^b\partial_\rho n^c,$$

となるが，注目すべきは，

$$\frac{1}{8\pi}\int_{S^2}dS_\mu\varepsilon^{\mu\nu\rho}\varepsilon_{abc}n^a\partial_\nu n^b\partial_\rho n^c$$

は Kroneckar 指数と呼ばれるホモトピー類 $\Pi_2(S^2)$ を分類する位相不変量で厳密に整数値を取る。従って伝導度は，$\sigma=\frac{e^2}{2\pi}Cn$ となり，必ず $\frac{e^2}{2\pi}C$ の整数倍の値を取る。すなわち，伝導度の位相量子化が起きる。加えてローレンツ不変な理論の場合，S^2 上の full 伝搬関数の漸近的なふるまいが Dirac 的ならば $C=\frac{2m+1}{2}$，Schrödinger 的ならば $C=m$，（m は整数）という結果が得られる。

ここで述べられた位相量子化の機構は，我々（石川健三氏との共同研究）の量子ホール効果への場の量子論的アプローチにおいて，本質的な役割をする。そこでは，多成分量子電磁力学（multi-component QED$_3$）の持つ位相構造が量子ホール効果として現実の巨視的な系に発現している。

詳細は以下の文献を参照して下さい。

文　献

1. T. Matusyama, Hokkaido Univ. preprint EPHOU86 SEP013 (to be published in Prog. Theor. Phys.).

   量子ホール効果についての我々の仕事では

2. K. Ishikawa and T. Matsuyama, Nucl. Phys. **B180** [FS18], 523 (1987).
3. K. Ishikawa and T. Matsuyama, EPHOU85 SEP014.
4. K. Ishikawa and T. Matsuyama, Z. Phys. **C33**, 44 (1986).
5. 当研究会の石川氏の報告.

4次元Quantum Electrodynamics と量子ホール効果

北大・理　石川健三，松山豊樹*

2次元電子系を実現する半導体である Si-MOSFET とか GaAs-GaAlAs ヘテロ接合で観測されている（整数）量子ホール効果ではホール伝導度 σ_{xy} が

*) 4月より京大基研。

$$\sigma_{xy}=\frac{e^2}{h}\times 整数 \tag{1}$$

で与えられるとみられている。[1]それゆえこの実験値を使って，ＱＥＤの結合定数であるαが精密に決められる可能性があり，注目をあつめている。この実験値を使って決められたα^{-1}の値は137.035968 (±23)であり，電子の異常磁気能率より求められたα^{-1}の値137.035993（±５±５）と比較すると，両者にわずかに差があるかもしれず，(1)式が厳密に成立しているかどうかを明らかにすることは非常に大事である。ＱＥＤのテストと関わる問題であり，物性的な観点からだけでなく，素粒子論的な観点からも詳しく調べることが必要である。

我々は今まで場の理論の計算に基づき，空間２次元フェルミ場の理論において非常に一般的に(1)式が成立することをみてきた。[2]場の量子論における電流の保存則から帰着される Ward-Takahashi 恒等式だけを使って，Hall 伝導度のトポロジー的性質を明らかにし，[2,3](1)式が相互作用，不純物，系の大きさ等によらずに成立することを証明してきた。

ところで電子は２次元的に振る舞うが，電磁場は３次元空間内を運動する。(1)式へのＱＥＤからの補正の有無を明らかにするには，４次元時空での通常のＱＥＤから出発することが必要である。ここでは[4]量子ホール効果に対して，

(i) 量子的な電磁相互作用（ＱＥＤ）からの補正，

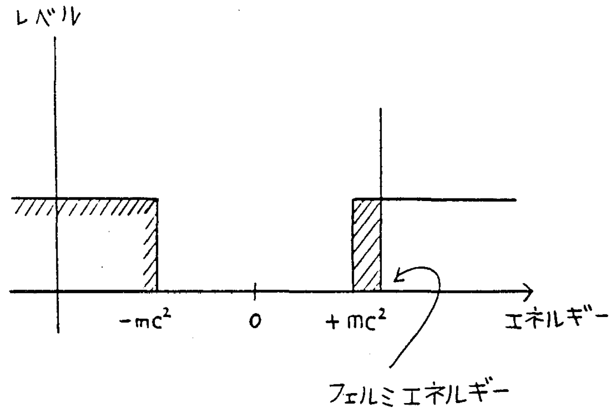
(ii) ２次元上にない電子状態の寄与，

(iii) 物質中での電荷の真空中でのそれからのずれの効果，

(iv) 非線型項の存在はあるか？

を調べる。

電子のスペクトルは



のように概略的に描かれ，物性実験では，基底状態のエネルギーは電子の静止エネルギーのごく近くにある。その近傍にある状態の電子だけが物理に大きくきくのは当然であり，その状態の自由度だけを取り出して考察するのは，多くの場合悪い近似でない。非相対論的な Schrödinger 方程式を適用することは，このような点から意味のあることであり，それに生ずる誤差を論ずるのは一般的にはささいなことであるだろう。しかしながら量子ホール効果では実験的にαを精密測定しうるかというのであり，これは無視出

来ない，むしろ大きな問題である。フェルミ面近傍だけでなく，フェルミ面から遠くにある電子―陽電子対等から(1)式へα，α^2，…等の補正を与える可能性があり，もしそうならばこれらを求めることなくしてはαを決めることは出来ないからである。実際，電子の異常磁気能率へはこのような補正があり，Kinoshita 等はこれの高次補正を求めているわけである。4次元 QED から出発して量子ホール効果の議論が出来れば，このような点が明らかになるはずである。

よく引き会いに出される Laughline [(5)]の議論もこのような観点に立ったとき，そのエレガントな説明の価値がうすれそうである。電流は内部エネルギーUの電子系を貫く flux ϕに対する微係数$\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial \phi}$として定義されるのにかかわらず，Laughlin は unite flux ϕ_0を使い$\dfrac{\Delta \mathrm{U}}{\phi_0}$と近似しているからである。近似式から出発して，生ずる誤差の大きさを求めることは原理的に不可能である。

ここでは場の量子論の通常の計算方法にのっとり，くりこみ理論を使い QED における Hall 伝導度を求める。物性で常識的な久保公式と少し境界条件が異なる計算であるが，本質的にはそれほど変わらず，またくり込みの議論に関して，通常の場の理論の方法がそのまま使えるのが利点であろう。

くり込み理論では電子及び光子の propagator 及び vertex function を次のように re-scale する。

$$\mathrm{S_F}(\mathrm{p}) = \mathrm{Z}_2\, \widetilde{\mathrm{S}}_\mathrm{F}(\mathrm{p}),\quad \mathrm{D}_\mathrm{F}^{\mu\nu}(\mathrm{q}) = \mathrm{Z}_3\, \widetilde{\mathrm{D}}_\mathrm{F}^{\mu\nu}(\mathrm{q}), \tag{2}$$
$$\Gamma^\mu(\mathrm{p}', \mathrm{p}) = \mathrm{Z}_1^{-1}\, \widetilde{\Gamma}^\mu(\mathrm{p}', \mathrm{p})$$

このときの scale factor は発散を含むわけであるが，物理量の方は発散のない有限量として理論値が求められるというものである。これにより，z軸方向について積分した電流と電圧によって定義されたホール伝導度 σ_{xy} は

$$\sigma_{\mathrm{xy}}(\mu) = \int d\mathrm{p_z}\, \frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{h}}\, \frac{1}{24\pi^2} \int d^3\mathrm{p}\, \varepsilon^{\mu\nu\rho}\, \mathrm{Tr}\left[\frac{\partial \widetilde{\mathrm{S}}^{-1}(\mathrm{p}, \mathrm{p_z})}{\partial \mathrm{p}^\mu}\, \widetilde{\mathrm{S}}(\mathrm{p}, \mathrm{p_z})\, \frac{\partial \widetilde{\mathrm{S}}^{-1}(\mathrm{p}, \mathrm{p_z})}{\partial \mathrm{p}^\nu}\, \widetilde{\mathrm{S}}(\mathrm{p}, \mathrm{p_z}) \right.$$
$$\left. \frac{\partial \widetilde{\mathrm{S}}^{-1}(\mathrm{p}, \mathrm{p_z})}{\partial \mathrm{p}^\rho}\, \widetilde{\mathrm{S}}(\mathrm{p}, \mathrm{p_z}) \right] \tag{3}$$

のように表わされる。ここで$\widetilde{\mathrm{S}}(\mathrm{p}, \mathrm{p_z})$は相互作用等の効果を含む full propagator である。この式の導出の際，使うのはz軸方向に積分した電流の保存則

$$\partial_\mu \widetilde{\mathrm{J}}^\mu = 0 \quad (\mu \neq 3)$$
$$\widetilde{\mathrm{J}}_\mu = \int d\mathrm{z}\, \mathrm{J}_\mu \tag{4}$$

だけであり，非常に一般的な式である。電子の propagator $\widetilde{\mathrm{S}}$をスケール変換してもこの式(3)の値が不変であることは一目遼然であろう。

次にエネルギー p^0 についての積分に注目する。propagator は無限小の虚数部を持つので，積分路は基底状態エネルギーより下のところでは実軸の下を通り，上のところでは実軸の上を通る。よって$\sigma_{\mathrm{xy}}(\mu)$にはエネルギーが無限大の状態からの寄与があるが，差 $\sigma_{\mathrm{xy}}(\mu_1) - \sigma_{\mathrm{xy}}(\mu_2)$ には μ_1 と μ_2 との間のエネルギーを持つ状態だけが寄与を与える。$\sigma_{\mathrm{xy}}(\mu)$ は decoupling 定理を破るのだが，[(6)] $\sigma_{\mathrm{xy}}(\mu_1) - \sigma_{\mathrm{xy}}(\mu_2)$ は decoupling 定理を満たしている。実験で観測するのは，実は$\sigma_{\mathrm{xy}}(\mu_1) - \sigma_{\mathrm{xy}}(\mu_2)$であるとみなすこと

が出来，物理量に対してはやはり decoupling 定理が成り立っている。これは Lagrangean に $\varepsilon_{\mu\nu\rho}A^{\mu}\partial^{\nu}A^{\rho}$ に比例した counter term を付け加えることはホール伝導度 $\sigma_{xy}(\mu)$ に μ に依存しない定数項を付け加えることに対応する。この不定性のないのは，差 $\sigma_{xy}(\mu_1)-\sigma_{xy}(\mu_2)$ であり，理論値を実験値と直接比較出来る。

(3)式は p_z について積分しているが， z 軸方向の特別な境界条件によりこの積分はとれることがある。差 $\sigma_{xy}(\mu_1)-\sigma_{xy}(\mu_2)$ は上記の議論により，

$$\sigma_{xy}(\mu_1)-\sigma_{xy}(\mu_2)$$
$$=\int_{\mu_1 \circlearrowleft \mu_2} dp_0 \int dp_z \frac{e^2}{h}\frac{1}{24\pi^2}\int dp_x dp_y \varepsilon^{\mu\nu\rho}\,\mathrm{Tr}\left[\partial_\mu \tilde{S}^{-1}\tilde{S}\,\partial_\nu \tilde{S}^{-1}\tilde{S}\,\partial_\rho \tilde{S}^{-1}\tilde{S}\right] \tag{5}$$

となる。 p^0 についての積分路は μ_1 と μ_2 を囲むことからエネルギー値を μ_1 と μ_2 の間とする状態だけがこの積分に寄与を与える。 z 軸方向の境界条件により，この方向のスペクトルが不連続なものであり，それの最低値だけが μ_2 よりも小さい時には，結局 p_z 積分はとれてしまう。よってこの時には

$$\sigma_{xy}(\mu_1)-\sigma_{xy}(\mu_2)$$
$$=\frac{e^2}{h}\frac{1}{24\pi^2}\int dp_0 \int d\vec{p}^{(2)}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\,\mathrm{Tr}\left[\partial_\mu \tilde{S}^{-1}\tilde{S}\,\partial_\nu \tilde{S}^{-1}\tilde{S}\,\partial_\rho \tilde{S}^{-1}\tilde{S}\right] \tag{6}$$

となりこれは3次元運動量空間から propagator の空間への写像の巻き数であり， propagator が積分路の上で regular ならば整数となる。以上のようにして，ギャップ領域，及び局在領域ではホール伝導度の量子化がおき，これは QED の相互作用による補正をうけない。

以上の議論の他に，物質中での電荷の真空中でのそれからのずれの効果，及び非線型ホール電流の非保存についての証明が研究会で述べられたが，紙数の関係上ここでは省略する。両方の議論にとってもゲージ不変性が本質的な役割をする。興味ある読者は我々の論文を参照されたい。

References

(1) K. V. Klitzing, G. Dorda and M. Pepper, Phys. Rev. Lett. **45** (1980) 44; S. Kawaji, in Proceedings of the Int. Sym. Foundation of Quantum Mechanics, ed., S. Kamefuchi et al. Physical Society of Japan p.327 (1983).

(2) K. Ishikawa and T. Matsuyama, Nucl. Phys. **B280** [FS18] (1987) 523; Zeit. für Physics **C33,** (1986) 44.

(3) H. So, Prog. Theor. Phys. **74,** 585 (1985).
T. Matsuyama, Prog. Theor. Phys. to appear.

(4) K. Ishikawa and T. Matsuyama, Hokkaido University preprint.

(5) R. B. Laughlin, Phys. Rev. **B23,** 5632 (1981).

(6) O. Abe and K. Ishikawa, in honor of Prof. G. Takeda's sixtieth birthday (World Sci. Pub.) (1986).